Quantum Computing

“Qubit”

Dr. Cahit Karakuş, Mart - 2021

Quantum Fiziği

- Quantum teorisi, Max Planck adında Alman fizikçinin atom altı parçacıklara ilişkin bazı fiziksel fenomenlere açıklamalar getirmesiyle başlamıştır.
- Sıcaklık artınca da son yörüngedeki elektronlarda hareklenmeler olur. (Floresan) Ancak, yüksek enerjili, kısa dalga boylu (yüksek frekanslı) elektromanyetik ışıma gönderildiği zaman metal levhadan elektronlar kopmaya başlıyor ve devreden geçen akım ampulün yanmasını sağlıyor.
- Fotoelektrik olayında iletken bir levhanın üzerine uzun dalga boylu elektromanyetik ışıma gönderildiğinde elektrik devresinde herhangi bir akım oluşmuyor. Üstelik gönderilen ışıma miktarı artırıldığında da durum değişmiyor.
- Max Planck, elektronların, elektromanyetik ışımada dalganın yanı sıra parçacık gibi de davranabileceğini belirterek quantum fiziğinin temellerini atmıştır. Daha sonra Albert Einstein, Niels Bohr, Louis De Broglie, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac ve pek çok ünlü fizikçi Planck’ in attığı temeller üzerine çalışamalar yaptılar ve ortaya quantum fiziği çıktı.

Quantum Mekaniğinin Temelleri

Quantum mekaniğinin temeli atom altı parçacıklarının davranışlarının öngörülmesi fikrine dayanmaktadır. 1901 ile 1932 tarihleri arasında quantumun 4 temel prensibi çalışılmıştır:

1) Birincisi atom altı parçacıklarının enerjisi parçacıklar halinde bulunur
2) Quantum mekaniğinin ikinci pensibi enerji parçacıkları aynı zamanda hem parçaçık ve hemde dalgadır.
3) Quantum mekaniğinin üçüncü prensibi ise parçacığın davranışının ve yönünün ne olduğunun anlaşılabilmesi için bir olasılıklar bütününden bahsedilmesi gerekmektedir.
4) Quantum mekaniğinin dördüncü prensibi ise Heisenberg'in belirsizlik prensibine göre bir parçacığın konumunun ve hızının tespit edilememesidir.

What is a Quantum Computer?

Klasik Bilgisayar (İkili)

- Tamamen klasik hesaplama yapabilen devrelerden ve kapılardan geçen elektriksel sinyalleri kullanan bir bilgisayar.

Quantum Bilgisayar

- Süperpozisyon ve dolanma gibi cihazlar aracılığıyla veriler üzerinde işlemler gerçekleştirmek için quantum mekaniği fenomeni (atom altı parçacıklar; elektron, foton) kullanan bir bilgisayar.
- Büyük ölçüde paralel yapıda olasılıklarına göre durum alanı bularak hesaplama yapmak için quantum biti kullanan bir bilgisayar (Süperpozisyon).
- Ölçme yapıldığında çökme.

Klasik bilgisayardan quantum bilgisayara

- Quantum Hesaplama
  - Şifreleme
  - Çarpanlarına Ayırma
  - CPU’nun ALU, GPU
- Bilgisayar sistemlerinde temel elektronik devre elamnı transistör. Bellek elemanı, lojiksel kapılar olarak kullanılmaktadır. Klasik Bilgisayarlarda gelinen son nokta, transistörler atomik yapıda üretilmektedir.
- Klasik bilgisayarlarda binlercesi birlikte çaılışarak hem kapasite hem de hız olarak işlevselliği artmaktadır. Daha hızlı ve daha büyük kapasitede işlemler yapabilmek için ALU olarak quantum bilgisayarlar kullanılmaktadır.
- Elektron sıcaklık değişimlerine aşırı duyarlı; süper iletken

Neden Quantum Hesaplama

- Var edilen kainat quantumdur,
  - klasik hesaplama modelleri bir soyutlama seviyesi sağlar.
  - ayrık durum sistemleri
- Cihazlar küçülüyor, atom (elektron, foton)
  - Moore yasası
  - çok küçük ölçekte çalışan quantum
- Quantum fenomenleri
  - quantum fenomeni kullanmak, başka türlü mümkün olmayan / verimli olmayan hesaplama görevlerini gerçekleştirilmesine izin verebilir
  - yetenekleri / kaynakları anlama

Quantum Hesaplama Adım Taşları

- Elektron – Foton Dolanıklığı
- Quantum Mekaniği
  - Schrodinger Dalga Denklemi
  - Schrodinger’in kedisi – Süperpozisyon(Üst üste gelme)
  - Heisenberg Belirsizliği, Olasılık
  - Dirac, Qubit
- Yapay Zeka – Makine Öğrenmesi Algoritmaları

Quantum Hesaplama

- Tanım – Büyük boyutta hesaplama işlemlerini gerçekleştirmek için quantum fenomenleri kullanılır.
- Quantum hesaplamada matematik ve quantum fizik temelinde ilerliyor: Olasılık, Algoritma, Quantum mekaniği.
- Quantum hesaplamada işlemler atom altı parçacıklar (foton) düzeyinde yapılır.
- Quantum fiziği, ve matematiği de Makine öğrenmesi algoritmaları olarak gelişmeye devam etmektedirler.
- Quantum hesaplamada kullanılan fiziksel özellikler:
  - Quantum süperpozisyonu
  - Quantum dolanıklığı
  - Belirsizlik ilkesi
  - Dalga karışması

Quantum Sistemler

- Quantum bilgisayarlarda ise qubitler atom altı parçacıklarından foton veya elektron gibi quantum sistemleri kullanılır.
- Quantum Bilgisayarlarda işlemci (ALU), verileri çok hızlı işleyebilmesi için quantalama hesaplama yaparken bitler elektronlar ya da fotonlar ile temsil edilmektedir. Buna da Qubit denir.
- Quantum bilgisayarlarda nanoteller olarak adlandırılan iletkenler sadece bir atom kalınlığındadır ve bir veri biti bir elektronun superpozisyonu ve dolanıklığı ile temsil edilmektedir.
- Quantum bilgisayarlarda quantum kablolar ya da quantum haberleşme ortamları ve quantum lojik kapılar vardır.
- Bir hesaplamanın başlangıcında, tüm qubitler iyi tanımlanmış haldedir, genellikle 0 durumundadır.
- Qubitlerin durumları, bir quantum kapısından geçene kadar değişmeden kalır.
- Quantum kanallarında durum değişmez, fakat sıcaklığın değişmemesi koşulu ile.

How to make a quantum bit?

Birbirine zıt yönde hareket eden iki parçacığın (iki elektron, bir elektron bir pozitron, bir elektron bir foton, iki foton gibi…) hareketlerin yönlerinde(spinlerinde) gözlenen uyum, quantum kuramının tahmin ettiği bu uyum, nasıl açıklanabilir?

Bir şey, başka bir şeyi "yerel" ise etkileyebilir görüşünün anlatımı. Yerellik görüşünün öteki ucu, "Amazon'da kanat çırpan kelebeğin Arizona'da fırtınalar yaratabileceği" görüşü.

Parçacıklar bir biçimde yola çıktıklarında hangisinin aşağı spinli, hangisinin yukarı spinli olduğu belirlidir. Bu durumda bilgiyi yanlarında taşıyor olacaklarından ne kadar uzağa gittiklerini bir önemi yoktur. Parçacıkların baştan sahip olabilecekleri bilginin sınırları 'Bell Teoremi''nde incelenmiştir. Bell Teoremi spin ölçümleri önceden belirlenmiş bir yönde değil de, iki parçacık için gelişigüzel açılarda seçilmiş açılarda yapıldığında ne olacağını ele alır.

Quantum kuramı, iki parçacık arasında, spinlerini önceden bilmeden de bir tamamlayıcılık ya da korelasyon olacağını öngörür. Bir parçacığın spinini gerçekten ölçtüğünüz üzerine olan bilgidir. Gerçekten bir parçacığın o noktadaki spinini (hareketin yönünü) ölçtüyseniz, ötekini de öngörebilirsiniz. Ama bunu yapamazsınız. Quantum durumlarının süperpozisyonuna ilişkin bir sonuç üzerinde hiçbir denetiminiz yoktur; sonuç bütünüyle rastlantısaldır ve bu sonucu hiç bir sinyal zorla yüklenemez. Daha doğrusu foton fotona emir veremez!

- quantum etkisi
- foton dolanması
- soğuk atom
- elektron dönme, devri, hareket (spin)

Quantum hesaplama, quantum mekaniği kanunlarına göre davranır

- Quantum fiziğinin temel bileşenleri olan belirsizlik, dolanıklık ve süperpozisyon gibi kavramlar olasılık temelli yaklaşımlar ile ifade edilmektedir. Oysa gerçek sayısal dünyada 0 ya da 1 söz konusudur. O halde yapılması gereken olasılık hesaplamanın gerçek durumlardan birine çökertecek matematiğin oluşturulmasdır. Buna da quantum dünyasında ölçme denmektedir.
- Öyle bir matematiksel model ve algoritma geliştirilir ki, aradaki işlemler quantum fiziği temelinde olsun ve istenen çıkış değeri kesin olarak bit elde edilsin.
- Quantum hesaplama, quantum mekaniği kanunlarına göre davranır ve Matris ve matematik olasılık hesaplama, süperpozisyon ve dolanıklık gibi kavramlardan yararlanır.
- Quantum veri işleme ve hesaplama yapmak için süperpozisyon ve dolanıklık gibi quantum-mekanik fenomenlerin kullanılmaktadır. Süperpozisyon durumunda olasılıklara bakılır.
- *Süperpozisyon ve dolanıklık quantum mekaniği kanunlarına göre olasılık hesaplama ile sorunları çözmek için quantum bilişiminin gücünden yararlanan quantum algoritmaları geliştilir.*
- Olasılık hesaplamalar, tahmin edilerek karar vermeye dönüştüğünden performansı artıracak yetenekler ve deneyimler kazandıran algoritmalara da ihtiyaç duyulmaktadır.

Qubit

Quantum lojik kapısı bir matristir

- Quantum lojik kapısı bir matristir.
- Bra (<I)   satır vektör; Ket (I>) sütun vektör.
- $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ birer durum vektörü olmak üzere $A|\psi\rangle=|\varphi\rangle$ olur, burada A matrisi bir lojik quantum kapısı olmak üzere, $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ kompleks vektör uzayında birer baz vektördürler.
- Qubit olarak tanımlanan $|0\rangle$ ve $|1\rangle$, quantum durumları kompleks vektör uzayında birer sütun vektör ile gösterilir. $|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; Bunlara base ketler denir.

Qubit

- Quantum hesaplamada en küçük bilgi birimine quantum bit denir, klasik sayısal hesaplamadaki bit'e biraz benzemesinden dolayı **qubit** olarak isimlendirilmiştir. Quantum hesaplamının en temel yapı taşına quantum bit, qubit denir.
- Quantum hesaplamada, temel bilgi birimi Qubit'tir.
- Qubit(Quantum bit): Bilgiyi depolamak için "quantum" etkisinin (dolanıklık) üst üste binmesini kullanan temel bir bellek birimidir.
- Bir "Qubit" bilgi olasılığını depolar. Aynı anda hem belirli olasılıkla "1" hem de belirli olasılıkla "0" ı temsil eder.
- Qubit'in iki durumu vardır. Bunlar bit'in
  - Klasik bit'te 0'a karşılık gelen $|0\rangle$ durumu
  - Klasik bit'te 1'e karşılık gelen $|1\rangle$ durumu
- Bunlara Dirac fonksiyonu denir. Bunlar vektördürler.
- Qubitler birer fiziksel duruma karşılık gelirler.

Quantum bilgisini temsil etmek

- $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ gösterimde iki durumdan birinde bir qubit olacaktır.
- Qubit(Quantum bit): Bilgiyi depolamak için "quantum" etkisinin (dolanıklık) üst üste binmesini kullanan temel bir bellek birimidir. “Qubit" bilgi olasılığını depolar. Aynı anda hem belirli olasılıkla "1" hem de belirli olasılıkla "0" ı temsil eder.
- Genellikle süperpozisyon denen lineer durum kombinasyonları oluşturmak da mümkündür. $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$
- $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ "temel durum vektörleri" olarak adlandırılır. Gösterime ket denir. Dirac tarafından icat edildi.
- Genel olarak bir qubit durumu, iki boyutlu bir kompleks vektör uzayındaki (Hilbert Uzayı) bir birim vektördür.
- Kuantum durumlarının matematiksel, gerçek, deneysel olarak doğrulanabilir sonuçları vardır.
- Bir qubitin durumları, iki durumu çözen varlıklar tarafından temsil edilebilir, örneğin:
    - Foton: Dikey veya Yatay polarizasyon
    - Elektron: Yukarı doğru döndür veya aşağı döndür (spin)
    - Atom: Ayrık enerji seviyeleri

What is a qubit?

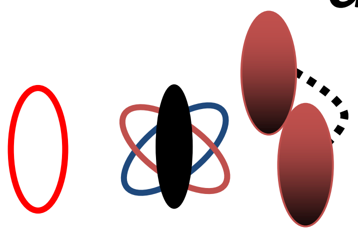
- A bit has two possible states $|0\rangle \text{ or } |1\rangle$
- Unlike bits, a qubit can be in a **state other than**

  $|0\rangle \text{ or } |1\rangle$
- We can form linear combinations of states

  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- A qubit state is a <u>unit vector</u> in a two-dimensional <u>***complex*** *vector space*</u>

THE GOLDEN RULES OF QUANTUM MECHANICS

Rule #1: *Quantum objects are waves and can be in superposition*



qubit: $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

$$i\hbar\frac{\partial|\boldsymbol{\varphi}\rangle}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{H}|\boldsymbol{\varphi}\rangle$$

$$i\hbar\frac{d\alpha}{dt} = \langle 0|H|0\rangle\alpha + \langle 0|H|0\rangle\beta$$

$$i\hbar\frac{d\beta}{dt} = \langle 1|H|0\rangle\alpha + \langle 1|H|1\rangle\beta$$

Rule #2: *Rule #1 holds as long as you don't look!*

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$|0\rangle$ *or* $|1\rangle$

probability $p = |\alpha|^2$ $1 - p = |\beta|^2$

Qubit'in Fiziksel Dünyadaki Karşılığı

- Bir qubit sadece matematiksel bir ifade değildir. Fiziksel dünyada bir karşılığı vardır.
- Bir elektronun spinini düşünün. Elektronun spini ölçüm yapıldığı zaman manyetik alan içerisine konulması demektir.
- Ölçüm yapıldığı zaman elektronun spini ya manyetik alanla aynı yönde (yukarı) ya da manyetik alanla ters yönde (aşağı) olur. Yukarı olma durumunu $|0\rangle$ ile temsil edilirse, aşağı olma durumu da $|1\rangle$ ile temsil edilmiş olur.
- Elektronun spini gözlemlenmediği sürece $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ifadesindeki durumların süperpozisyonu şeklinde de olabilir.
- Diğer bir örnek ise, bir fotonon polarizasyonu fiziksel sistemdir.

Qubits

Quantum mechanics tells us that any such system can exist in *superposition* of states.

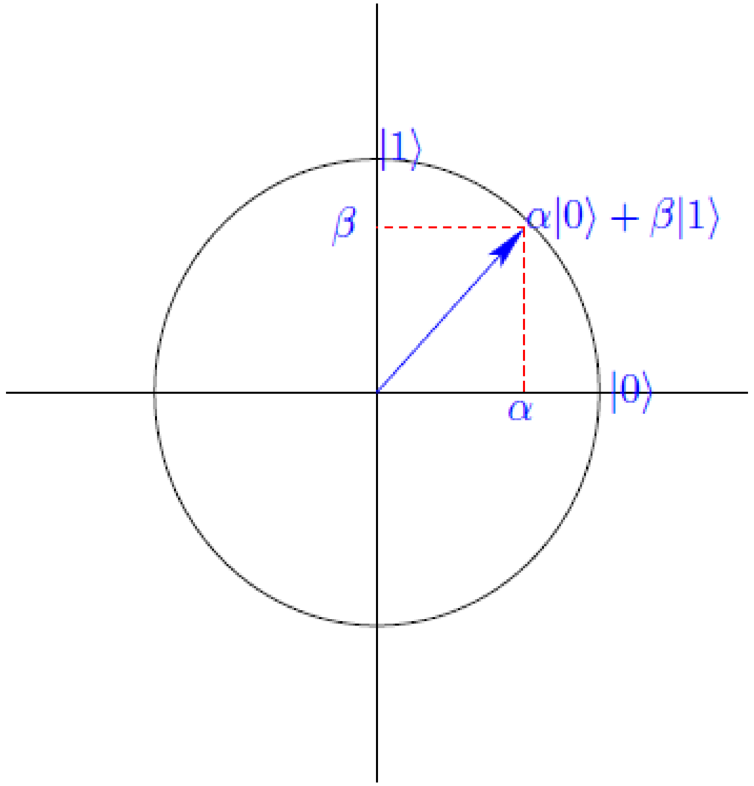
In general, the state of a *quantum bit* (or *qubit* for short) is described by:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

where, α and β are complex numbers, satisfying

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Qubits



A qubit may be visualised as a unit vector on the plane.

In general, however, α and β are *complex* numbers.

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1?$$
$$|\alpha^*\alpha| + |\beta^*\beta| = 1?$$

Dirac Notation: a Qubit

Olasılıksal Genlik

Durum

$$|q\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

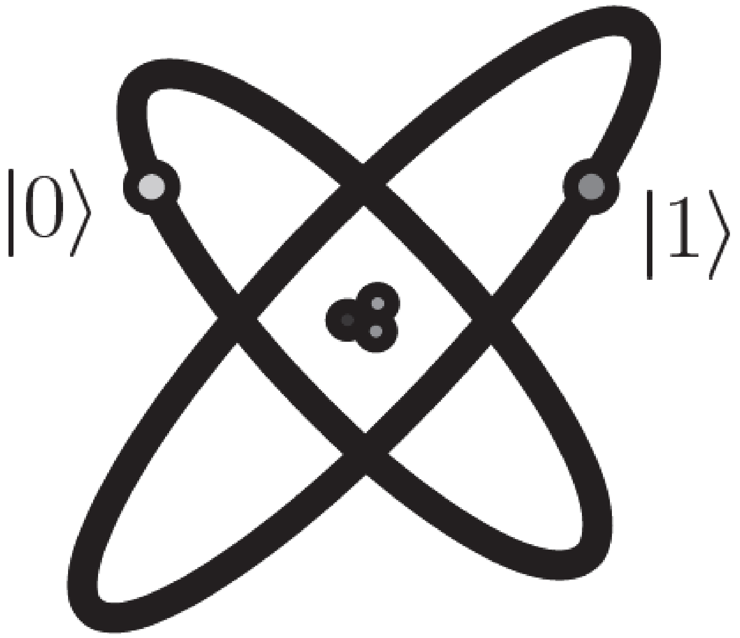
Superpozisyon

Quantum Bits (Qubits)

- Classical bits vs. Quantum bits
- Qubits are mathematical objects (similarly to 0/1 in classical bits)

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{\text{Prob.}} + \underbrace{|\beta|^2}_{\text{Prob.}} = 1$$



Vector Notation: a Qubit

Probability Amplitude
for State 0

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Probability Amplitude
for State 1

Vektörel Çarpımlar

Quantum Lojik Devreleri

- Quantum lojik devreleri tasarlanırken veya quantum hesaplama yapılırken, giriş ve çıkış değerlerine bakılır. Araya quantum hesaplama matematiği (Matris) devreye girer.
- Quantum lojik devresinde giriş, X; çıkış, b olmaktadır. A matrisi quantum mekaniğine göre matematiği ve ardından gerçek quantum devresi çalıştırılmaktadır. Çökertme esalı çalıştığından bit 0 ya da 1 olarak kullanılabilmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

veya

$A.X = B$ biçiminde yazılır.

$|A| \neq 0$ olmak üzere, $A.\ X = B$ doğrusal denklem sistemin-de

$A.X = B$

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$I.X = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B$ bulunur.

Matris çarpmaya örnekler

Satır vektör ve sütun vektör

Aşağıdaki gibi iki matris verilsin; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

Burada matris çarpma işlemi şöyle:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz,$$

Benzer şekilde; $$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}$ ile $\mathbf{BA}$nın çok farklı matrisler olduğuna dikkat edin. İlk matris 1×1 boyutlu matris iken, ikincisi 3×3 boyutlu matristir.

Kare matris ve sütun vektörü

Aşağıdaki gibi iki matris verilsin;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ px + qy + rz \\ ux + vy + wz \end{pmatrix}$$

Bu örnekte $\mathbf{BA}$ tanımlı değildir.

Baz Vektörler

Skaler çarpım:

- $\vec{Y} = \alpha\vec{V} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$

- $\vec{V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

- Her vektör baz vektörleri şeklinde genişletilebilir.
- Baz vektörde, her sütunda bir adet 1; geriye kalanlar 0 olmak zorundadır.
- Baz vektör olabilmesi için vektör katsayılarının kareleri toplamı 1 olmak zorundadır.

Vektörel Çarpımlar

$$\langle \Psi || \Phi \rangle = \langle \Psi \Phi \rangle \quad \text{"Inner Product"}$$
$$|\Psi\rangle\langle \Phi| = |\Psi \Phi| \quad \text{"Outer Product"}$$
$$|\Psi\rangle|\Phi\rangle = |\Psi \Phi\rangle \quad \text{"Tensor Product"}$$

$$\langle \Psi|\langle \Phi| \qquad \textit{Invalid Operation}$$

Bra: $\langle a|$, satır vektörüdür.

Ket: $|b\rangle$, sütun vektörüdür.

Inner Product

Inner Product — <ΨΦ>

A product of two quantum states bra *Psi* $<\Psi|$ and ket *Phi* $|\Phi>$ is called an **inner product**, producing a **value.** An inner product is also called an *overlap*, the overlap between quantum states.

$$\begin{aligned}\langle\Psi||\Phi\rangle &= \langle\Psi\Phi\rangle \\ &= \begin{pmatrix}\frac{4}{5}i & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{10}i + \frac{3\sqrt{3}}{10}\end{aligned}$$

$|\psi\rangle$: Sütun vektör, $\langle\varphi|$: satır vektör

iki vektörün iç çarpım $\langle\psi\varphi\rangle = \langle\psi| . |\varphi\rangle$ değeri nedir?

Sütun vektör satır vektöre dönüşürken kompleks eşleniği alınır.

İç çarpım skaler çarpımdır. Satır vektör ile sütun vektörün skaler çarpımıdır, skaler değer elde edilir.

Matris ile sütun vektörün skaler çarpımı da iç çarpımdır, sütun vektör elde edilir.

Outer products

Outer Products

Inner products aren't the only way to multiply vectors. Occasionally, we'll switch the order of the bra and ket in order to take the **outer product,** whose outcome is a matrix, rather than a single number. For two vectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$ in a Hilbert space, we denote the outer product as $|a\rangle\langle b|$, where $\langle b|$ is equal to the conjugate transpose of $|b\rangle$, as before. This gets us:

İki vektörün dış çarpım $|\psi\rangle\langle\varphi|$ değeri nedir?

Sütun vektör satır vektöre dönüşürken kompleks eşleniği alınır.

Sütun vektör ile satır vektör çarpılır, matris elde edilir.

b= $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots & b_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \cdots & a_1 b_n^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n b_1^* & \cdots & \cdots & a_n b_n^* \end{pmatrix}$$

Tensor products

Most often, you'll see the tensor product used to describe the shared state of two or more qubits. Notice here that the tensor product doesn't require taking one of the vector's conjugate transposes like the outer product does—we're multiplying two kets together instead of a ket and a bra. The tensor product of vectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$, written $|a\rangle \otimes |b\rangle$ or $|ab\rangle$, equals:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tensor products

İki girişli quantum kapılarının durum vektörlerini oluşturma

- $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
- $|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$
- $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
- $|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Paralellik Durumu

Quantum Hesaplama

- Quantum fiziği sayesinde biliyoruz ki elektron, foton gibi atomaltı parçacıklar birer olasılıksal durum vektörleri biçiminde davranış göstererek birden fazla farklı fiziksel durumların bileşeni biçiminde olabilirler.
- Bunun avantajına gelince: 2 bitlik sıradan bir bilgisayarda ikilik sayı düzeni ile sadece 4 veri kombinasyonunu durumu oluşturabilirsiniz, 2^2=4, (00, 01, 10, 11). Bununla bir lojik problemi çözerseniz elde edeceğiniz sonuç bu dört kombinasyondan olacaktır. Lojik devre hesaplamaları ile beklenen sonuç elde edilir.
- Sıradan bir seri bilgisayar dört kombinasyonu tek tek deneyerek doğru sonuca varırken, 2 Qubitlik bir quantum çip bu kombinasyonların hepsinin olma ihtimalleri ile toplamını aynı anda hesaplayacaktır. 2^(2^2)
- Bu durumda 6 Qubit bir sistemde, 2^(2^^{6}) =2^64 durumun olasılıksal genlik katsayıları ile çarpılan her bir durumun toplamı söz konusudur.
- Şu an IBM 50 qubitlik quantum bilgisayar zerinde çalışmaktadır. O halde 2^(2^50) durumun olasılıksal genlik değerleri ile çarpılıp toplanması söz konusudur.

Quantum Algoritması

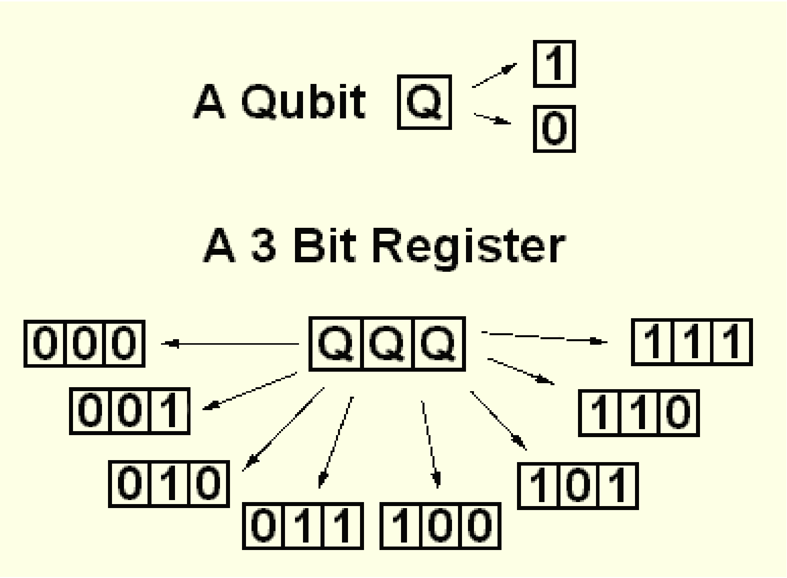
- Hesaplama, quantum mantık kapılarının manipüle (saklama, transfer, aritmetiksel ya da mantıksal işlemler yapmak) edilmesiyle gerçekleştirilir.
- Tek bir qubit $|0\rangle$, $|1\rangle$ veya bu ikisi arasındaki (quantum çökme) bir değeri alabilir.
- Bir qubit çifti 4 quantum çökme durumunun herhangi birinde,
- Üç qubit ise 8 quantum çökme durumunun herhangi birinde olabilir.
- Genel olarak n Qubit sahibi bir quantum bilgisayarı aynı anda 2^n herhangi birinde çökme olabilir.
- Normal bilgisayarlar 2^n durumun sadece birinde olurken, bir quantum bilgisayarı bu durumların hepsinde ya da bir kısmında bulunabilir.
- Quantum bilgisayarlarda qubitler belirli quantum mantık kapıları ile düzenlenebilir. Uygulanan bu kapı serilerine quantum algoritması adı verilir.

Quantum hesaplamadaki parelellik durumu

- Quantum hesaplamada, kompleks ifadeler olan olasılıksal genlikler ile herbir durumun çarpılması ve tüm durumların toplanması söz konusu olduğundan tüm olasılıksal genliklerin mutlak değerlerinin karelerini toplamı 1'e eşittir.
- Olasılık teorimine göre
  - Her bir katsayının mutlak değeri 0 ile 1 arasındadır. 0 ve 1 de dahil tüm değerleri alabilir.
  - Katsayıların mutlak değerlerinin karelerinin toplamı da 1 eşittir.
- Elbette Qubit sayısı 2'den 6'ya veya 49'a çıkarsa aynı anda çok daha fazla veri işleyebilir ve süperpozisyon özelliğiyle gerçekten paralel işlem yapan quantum bilgisayarlar sayesinde en zor sorular en hızlı şekilde çözülebilir.
- Buradaki parelellik klasik bilgisayar sistemlerindeki parelellikten farklı dır. Klasik bilgisayarlarda her bir parelel hat üzerinde ya 0 ya da 1 vardır. Fiziksel olarak da elektriksel sinyaler ile temsil edilirler.
- Quantum hesaplamadaki parelellik durumu kompleks katsayıları olan bir vektör ile gösterilmektedir. Ölçme yapıldığında bu parellel durumlardan birisine çökertilmektedir.
- Quantum hesaplama her bir parelel hat durumunun kompleks genlik katsayısı vardır. Bu katsayıların mutlak değerinin karelerinin toplamı 1'e eşittir.

$Y=2\^{}2^n$

- Qubit üzerinde tek işlem yaparak işlemi iki farklı değer üzerinde gerçekleştirilir.
- Aynı şekilde, iki kübitlik bir sistem 4 değerde işlemi ve üç qubit sekizlik bir sistemde işlemi gerçekleştirecektir.
- Bu nedenle qubit sayısını artırmak, sistemle elde edebileceğimiz 'quantum paralelizmini' katlanarak artırır.



What is the advantage?

- It is very very fast compared to conventional computers
- It has very large memory, example 10-qubit is ….
- 10-qubit=(2^(2^10))
- =179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081157732675805500963132708477322407536021120113879871393357658789768814416622492847430639474124377767893424865485276302219601246094119453082952085005768838150682342462881473913110540827237163350510684586298239947245938479716304835356329624224137216
- IBM 50-qbuit quantum bilgisayarını düşünün 50-qubit=2^(2^50)

Süperpozisyon

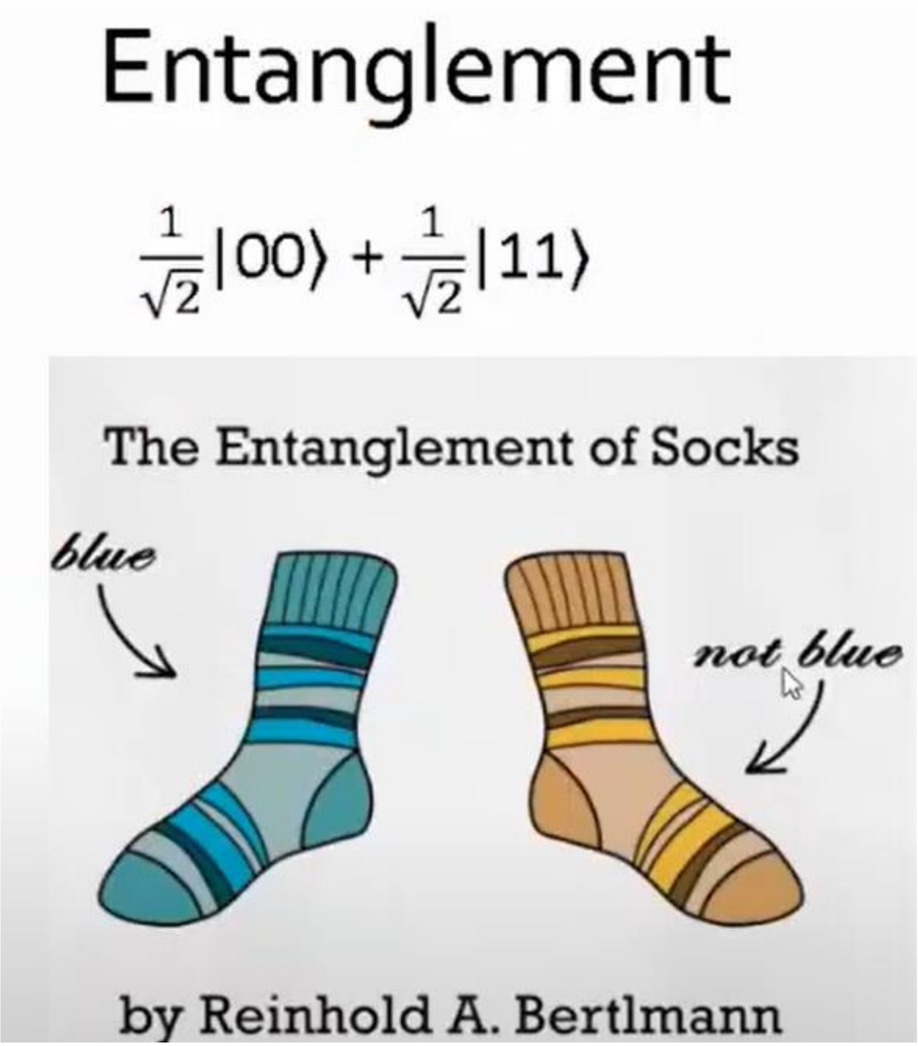
Quantum Fiziğinde Süperpozisyon

- Klasik fizikte, sayısal bir sistem için 2 farklı durum söz konusudur (0/1). Bu sistemler kullandığımız bilgisayarlarda bulunan bit mantığı ile çalışır. Bir bitin durumu 0 ya da 1 dir.
- ***Quantum fiziğinde Qubit olarak ifade edilen aynı anda belirli olasılıklarla hem 0 hem de 1 olan yapıların mevcut olmasına süperpozisyon ilkesi denir. Bu ilkeye göre bir cisim üzerindeki elektron aynı anda farklı yerlerde bulunabilir.***
- Quantum bilgisayarda süperpozisyon: klasik bilgisayarlarda paralel hatların her birinde 1 ya da 0 vardır. Quantum bilgisayarlarda her bir hat üzerinde belirli bir olasılıkla 1, belirli bir olasılıkla 0 olma durumu söz konusudur.
- Quantum fiziğinde ölçüm yapıldığında süperpozisyon çökmesi olur, durum netleşir. Ya 0 ya da 1 dir.

Süperpozisyon

- |0> ve |1> "temel durumlar" olarak adlandırılır. Gösterime ket denir. Dirac tarafından icat edildi.
- Qubit'in süperpozisyonda olma durumu çok farklı hesaplama teknikleri kullanılmasına olanak sağlar.
- Ancak ölçümden önce, qubit bazı doğrusal durum kombinasyonlarına sahiptir.
- Bir qubit durumu:
  - $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ile gösterilir. Bu gösterime süperpozisyon denir. (2^(2^n))
  - Süperpozisyon durumu quantum hesaplamayı güçlü kılmaktadır.
  - Burada α ve β kompleks sayılardır. Reel veya negatif sayı olarak da gösterilebilir.
  - α ve β, kompleks vektör uzayında iki boyutlu bir vektör ile temsil edilir.
- Ölçümden sonra, |0> veya |1> gösterimde iki durumdan birine bir çökme olacaktır.
- Bir kübitin durumları, iki durumu çözen varlıklar tarafından temsil edilebilir, örneğin:
  - Foton: Dikey veya Yatay polarizasyon
  - Elektron: Yukarı doğru döndür veya aşağı döndür (spin)
  - Atom: Ayrık enerji seviyeleri

Süperpozisyon



Bir qubit'in durumu gözlemlendiğinde diğer qubit'in durumu da belirlenmiş olur.

Bir adam sabahın karanlığında fark etmeden bir ayağına mavi diğer ayağına farklı bir çorap giyiyor. Ofise geliyor, siz adamın ayaklarından birinde mavi çorap olduğunu görürseniz, diğer ayağa bakmadan, doğal olarak öteki ayağında da mavi çorap olduğunu düşünürsünüz. Durumu fark eden eşi adama telefon ediyor, sağ ayağındaki çorabın rengi nedir diye sorar. Mavi yanıtını aldığında sol ayağındaki çorabın renginin sarı olduğunu söyler.

Dolanıklıkta buna benzer. Soldaki örneğe bakıldığında iki durum olsun: 00, 11. olasılıklarının kareleri eşit olsun, (1/2). Birinci ifadeye bakıldığında qubit'in durumu gözlemlendiğinde ve 0 durumunda ise ikinci qubit'te 0 durumuna çökmüş olur. Ya da ikinci durumda 1 görülmüş ise ardından 1 durumuna çökmüş olur. Bunlar çok ani bir şekilde oluyor. İlk bakışta kabul edilemez olsa da test edildiğinde böyle olduğu görülmektedir. İletişim olmadığından, bir taraf 0 ölçüldüğünde, karşı taraf da 0 ölçülür diye bir durum yok. Bu durum bilinmiyor.

Superposition

- Quantum state of qubit is given by $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$, $|a_0|^2+|a_1|^2=1$.

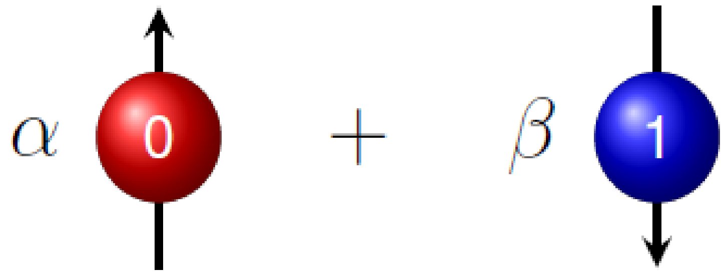
Measurement

- Either observe $|0\rangle$ or $|1\rangle$
- Probabilities are the squared absolute values of the amplitudes

- Diri olma olasılığı %50 yani 0.5, Ölü olma olasılığı %50 yani 0.5. Belirli bir olasılıkla 1 belirli bir olasılıkla 0 olma özelliğine süperpozisyon denir.
- Görüldüğü gibi a0 genliğinde 0, a1 genliğinde 1 dir. Dışarıdan bir müdahale yapılıp qubit gözlemlenip ölçülene kadar bu qubit aynı anda sanki hem 0 hem 1 imiş gibi davranır.
- Ölçüm yaptığınız anda genliğin karesi olasılıkla ya 0 durumuna çöker, ya da 1 durumuna çöker. Bir qubit'e bakıldığında ya 0 ya da 1 görülür.
- Atılıp yer düşene dek para ya yazı ya da turadır. Para yer düştüğünde durumu bellidir.
- Oysa para havada iken hem yazı hem turadır. Zaman içerisinde yazı ve tura durumlarının değiştiği görülür. qubit'lerde paranın havadaki durumuna benzer.
- Siz baktığınız an o anı belirliyorsunuz. O ana kadar elektronun durumu belirli değildir. Sizin baktığınız andaki durumda ise durumu hemen değişmiştir. Burada daha karmaşık bir durum söz konusudur. İşin işine genliklerin negatif ve kompleks sayıların girmesi de işleri daha da karmaşık hale getirmektedir.

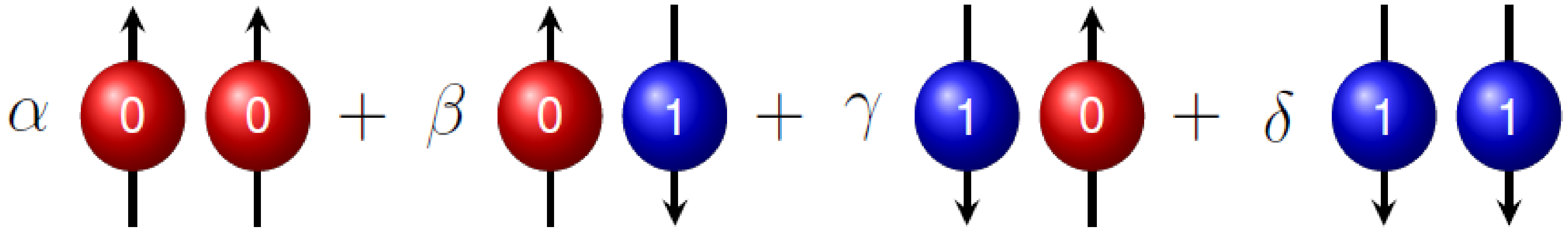
The quantum model: qubits

As well as being in states corresponding to 0 or 1, a qubit can be anywhere in between!



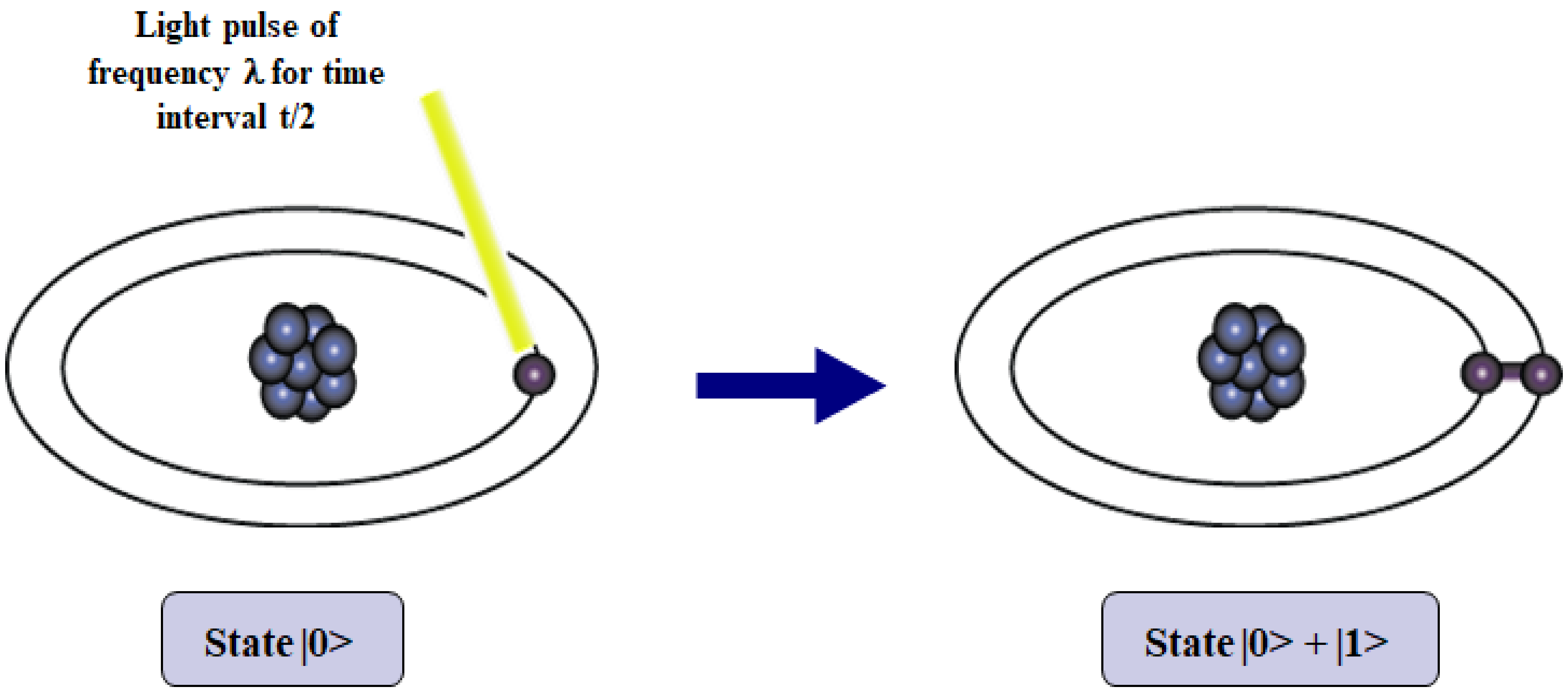
- Here α and β are any numbers (in fact, more generally complex numbers. . .) satisfying $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- This is called superposition.

If we have n qubits, they can be in a superposition of 2^n different states:



This allows a quantum computer to run an algorithm on many possible inputs simultaneously.

Representation of Data - Superposition



- Consider a 3 bit qubit register. An equally weighted superposition of all possible states would be denoted by:
- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|001\rangle + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle$

More than one qubit

If we concatenate two qubits $\left(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle\right)$ $\left(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle\right)$

we have a 2-qubit system with 4 basis states

$$|0\rangle|0\rangle = |00\rangle \qquad |0\rangle|1\rangle = |01\rangle \qquad |1\rangle|0\rangle = |10\rangle \qquad |1\rangle|1\rangle = |11\rangle$$

and we can also describe the state as

$$\alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

or by the vector

$$\begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

More than one qubit

In general we can have arbitrary superpositions

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1?$
$|\alpha^*\alpha| + |\beta^*\beta| = 1?$

$$\alpha_{00}|0\rangle|0\rangle + \alpha_{01}|0\rangle|1\rangle + \alpha_{10}|1\rangle|0\rangle + \alpha_{11}|1\rangle|1\rangle$$

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$$

where there is no factorization into the tensor product of two independent qubits.
These states are called *entangled*.
Ölçme yapıldığında $|0\rangle$ ya da $|1\rangle$ durum vektörlerinden birine çökmesi için uygun quantum lojik kapısı kullanılır.

Multi-qubit Systems

2-qubit QC:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \mapsto |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$$

N-qubit quantum computer $\longrightarrow$ 2^n states $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |2^n - 1\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle \qquad \sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2$$

“Dolanıklık (Entanglement)”

Entanglement: Formalism

- iki tek parçacık durumunun bir çarpımı olarak yazılamazsa, iki parçacıklı bir durum, birbirine dolanıktır.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2\right)$$

- Bir durum birbirine dolanık değilse, ayrışabilir. Çarpanlarına ayrılır.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 + |1\rangle_1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2 + |1\rangle_2\right)$$

Dolanıklık (Entanglement)

Suppose that two qubits are in states: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$

The state of the combined system their ***tensor product***:

$$\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)\left(\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle\right) = \alpha\alpha'|00\rangle + \alpha\beta'|01\rangle + \beta\alpha'|10\rangle + \beta\beta'|11\rangle$$

Question: what are the states of the individual qubits for

1. $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$

Answers:

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$
2. ?? ... this is an ***entangled*** state

Entangled states – 2 Qubit System

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$
$$|\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$
$$= ac|0\rangle + ad|1\rangle + bc|2\rangle + bd|3\rangle$$

$$\exists \quad \Rightarrow \quad \alpha = ac, \beta = ad, \gamma = bc, \delta = bd$$

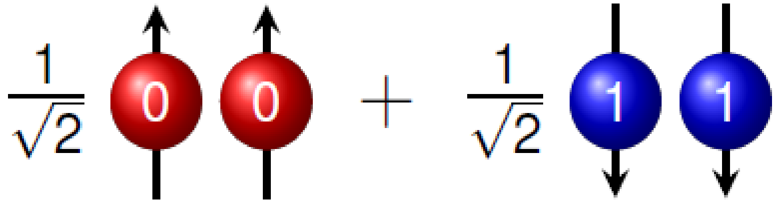
$$\exists \Longleftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\alpha\delta \neq \beta\gamma \Rightarrow$$ Entangled state

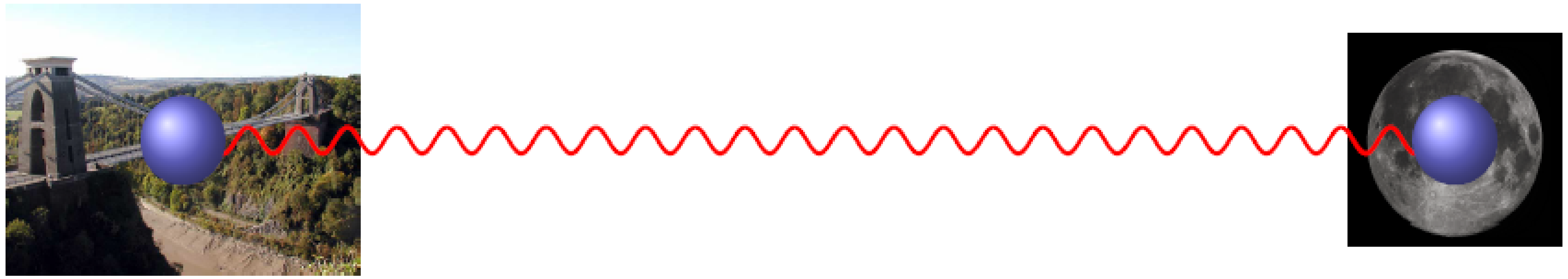
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Measurement and entanglement

- If we measure some qubits, we see each outcome with probability equal to its corresponding coefficient squared.
- For example, imagine we have two qubits in the state



- Then if we measure the qubits, we get outcome 00 with probability $\frac{1}{2}$, and outcome 11 with probability $\frac{1}{2}$.
- But what if the first qubit is in Bristol, and the second is on the Moon?



- It seems that the measurement result in Bristol has instantaneously affected the qubit on the Moon. . .
- This bizarre phenomenon is known as quantum entanglement.

Görünüşe göre Bristol'deki ölçüm sonucu anında Ay'daki kübiti etkiledi. . .
Bu tuhaf fenomen, quantum dolaşıklığı olarak bilinir.

Qubit’lerin ölçülmesi

Measurement

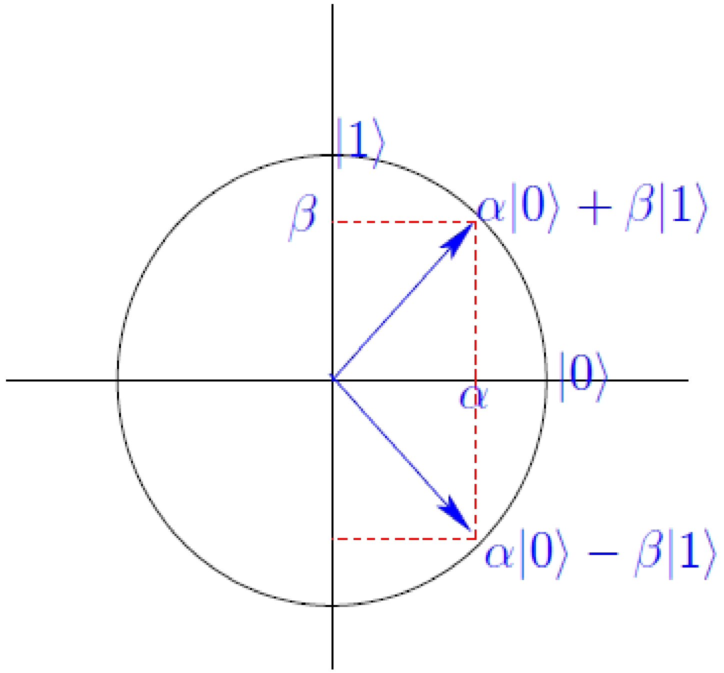
- $\sum|\alpha|^2$, for amplitudes of all states matching an output bit-pattern, gives the probability that it will be read.
- Example:

  $0.316|00\rangle + 0.447|01\rangle + 0.548|10\rangle + 0.632|11\rangle$

  – The probability to read the rightmost bit as 0 is $|0.316|^2 + |0.548|^2 = 0.4$
- Measurement during a computation changes the state of the system but can be used in some cases to increase efficiency (measure and halt or continue).

Qubit’lerin ölçülmesi

- Klasik bit’i quantum bit’ten ayıran en önemli özellik süperpozisyon denilen ara durumda da olabilmesidir. Bu durum erişime kapalıdır. Ara durumu doğrudan ölçmek mümkün değildir.
- Bir quantum sistem ölçüldüğünde sisteme müdahale edilmiş olur. Sistem bozulur.
- **Bir ölçüm yapıldığı anda qubit iki durumdan bir tanesine çöker. Ya |0⟩ olarak gözlemlenir ya da |1⟩ olarak gözlemlenir. Durum vektörü iki durumdan bir tanesine çökecektir.**
- Bununla birlikte, qubitler ölçüldüğünde, ölçümün sonuçları her zaman ya $|0\rangle$ ya da $|1\rangle$ 'dir; bu iki sonucun olasılıkları, qubitlerin ölçümden hemen önce olduğu quantum durumuna bağlıdır.
- Ölçüm yaptığımızda,
- $|0\rangle$ olma ihtimali P0=$|\alpha|^2$=$\alpha^*\alpha$,
- $|1\rangle$ olma ihtimali P1 =$|\beta|^2$=$\beta^*\beta$
- Bu iki ihtimalin toplamı 1 olacaktır. Olasılık temel yasası bir kümeyi olauşturan bileşenlerin olma olasıkları toplamı 1’e eşittir.
- $|\alpha|^2 + |\beta|^2$=1

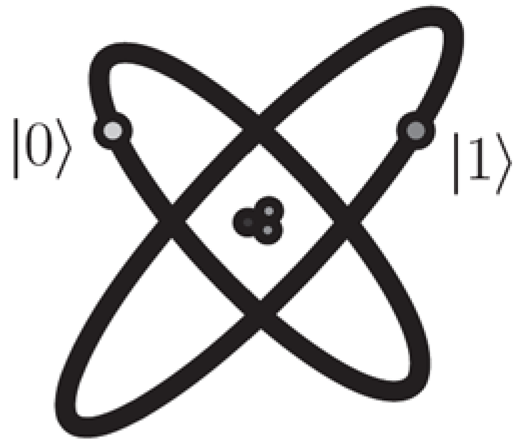


Quantum Bits (Qubits)

- Kompleks vektör uzayında bir vektör olan $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ifadesinin iç çarpımı yapılırsa,
- $\langle\psi^*|\psi\rangle = (\alpha^*|0\rangle + \beta^*|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^*\alpha\langle 0|0\rangle + \beta^*\beta\langle 1|1\rangle + \alpha^*\beta\langle 0|1\rangle + \alpha\beta^*\langle 1|0\rangle$ olur.
- Ortanormal özelliğinden dolayı $\langle 0|0\rangle=1$, $\langle 1|1\rangle=1$, $\langle 0|1\rangle=0$, $\langle 1|0\rangle=0$ olur.
- $\langle\psi^*|\psi\rangle = \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ durumunu ölçmeye yönelik herhangi bir girişim, $|\alpha|^2$ olasılıkla $|0\rangle$ ve $|\beta|^2$ olasılıkla $|1\rangle$ sonucunu verir.
- Ölçümden sonra, sistem ölçülen durumdadır!
- Yani, daha fazla ölçüm her zaman aynı değeri verecektir.
- Bir qubit durumundan yalnızca bir bitlik bilgi çıkarabiliriz.
- $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ve $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ ölçümleri için aynı olasılıklara sahipler. Bununla birlikte, nasıl geliştikleri açısından farklı davranan farklı durumlardır.
- Bir qubit'in durumu kompleks eşdeniği ile iç çapımı 1 olduğundan dolayı iki boyutlu kompleks vektör uzayında bir birim vektör ile temsil edilir. Quantum mekaniğinde tüm ket vektörler normalize olmaldır.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{\text{Prob.}} + \underbrace{|\beta|^2}_{\text{Prob.}} = 1$$



Örnek

- Bir qubit'in genel durumu $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ bu ifade olsun.
- Ölçüm yapıp qubit'in hangi durumda olduğunu öğrenilmek istenildiğinde, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğu görülür.
- $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- Qubit'in $|0\rangle$ durumunda olma ihtimali %50 dir. $P(|0\rangle)=|\alpha|^2=\frac{1}{2}=0.5$
- Qubit'in $|1\rangle$ durumunda olma ihtimali %50 dir. $P(|1\rangle)=|\beta|^2=\frac{1}{2}=0.5$

Usage Notes

- A lot of slides are adopted from the presentations and documents published on internet by experts who know the subject very well.
- I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,

Dr. Cahit Karakuş

cahitkarakus@gmail.com